1

ECOLE POLYTECHNIQUE
CONCOURS 1975

OPTION P'

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4h)

A - EXERCICE

1) Résoudre l'équation différentielle :

$$(E)\quad (3x - x^2)\frac{dy}{dx} - 3y + \frac{3x}{3-x} = 0$$

2) Etudier sommairement les variations des solutions (on pourra chercher d'abord à exprimer ces solutions au moyen seulement de $u = \frac{x}{3-x}$).

Indiquer sur une même figure, où l'on aura représenté au préalable l'ensemble des points pour lesquels $\frac{dy}{dx} = 0$, les diverses allures des courbes intégrales. (unité des abscisses = 3 carreaux ; unité des ordonnées = 6 carreaux).

3) Déterminer celle des solutions de (E) dont la dérivée seconde s'annule pour $x = 1$.

Placer la courbe représentative, au voisinage du point d'abscisse 1 par rapport à sa tangente en ce point.

(on pourra déduire de (E) les valeurs en $x = 1$, des dérivées nécessaires).

B - PROBLEME

Dans ce problème, on désigne par H le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles de deux variables réelles, qui sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire qui admettent en tout point de $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles de tous ordres.

2

Pour $f \in H$, on désigne par $\frac{\partial f}{\partial x}$ et par $\frac{\partial f}{\partial y}$, respectivement, les dérivées partielles de f par rapport à sa première variable et par rapport à sa deuxième variable. On désignera de même par $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, respectivement, les fonctions dérivées partielles secondes de f.

I

a et b sont deux réels, non nuls, fixés dans toute cette partie.

1) On note respectivement φ_1 et φ_2 les endomorphismes de H ainsi définis :

$$(\forall f \in H) \qquad \varphi_1(f) = \frac{\partial f}{\partial x} - a f \quad , \quad \varphi_2(f) = \frac{\partial f}{\partial y} - b f .$$

ⓐ Trouver $\operatorname{Ker} \varphi_1$, $\operatorname{Ker} \varphi_2$ et $\operatorname{Ker} \varphi_1 \cap \operatorname{Ker} \varphi_2$

ⓑ φ_1 et φ_2 sont-ils surjectifs? (On admettra ici que $I(y) = \int_{x_0}^{x} h(t, y)\, dt$ est C^∞ en y lorsque h est C^∞ en (t, y) sur R^2) .

2) On suppose donnés deux éléments A et B de H. On note E_1 la partie de H, éventuellement vide, constituée par les solutions communes aux deux équations suivantes :

$$① \quad \frac{\partial f}{\partial x} - a f = A \qquad\qquad ② \quad \frac{\partial f}{\partial y} - b f = B$$

ⓐ En formant $\varphi_2(A)$ et $\varphi_1(B)$, montrer que A et B, et leurs dérivées partielles du premier ordre, satisfont nécessairement, pour que E_1 soit non vide, à une relation $\mathcal{R}_1$ qu'on écrira.

ⓑ Par le changement de fonction inconnue $f \longmapsto g$ défini par $f(x, y) = e^{ax + by} . g(x, y)$, retrouver la relation $\mathcal{R}_1$ et examiner si elle est suffisante.

3) Appliquer l'étude précédente aux deux cas suivants :

ⓐ A est fonction de x seulement, B est fonction de y seulement.

ⓑ A est fonction de y seulement, B est fonction de x seulement.

On exprimera A et B, dans chacun de ces deux cas, de la manière la plus générale pour que E_1 soit non vide, et on déterminera E_1.

...\...

4) Soit J le sous - espace vectoriel de H constitué par les fonctions polynômes (à deux variables) et soient ϖ_1 et ϖ_2 , respectivement, les restrictions de φ_1 et φ_2 à J .

ⓐ Démontrer que ϖ_1 et ϖ_2 sont des automorphismes de J. On établira à cet effet que lorsque A est un élément de J, l'équation ① considérée séparement admet une solution et une seule dans J ; on exprimera cette solution sous forme d'une combinaison linéaire de A et de ses dérivées partielles successives par rapport à la première variable.

On opérera de même pour l'équation ②

ⓑ Montrer que, lorsque A et B sont des éléments de J , la relation $\mathcal{R}_1$ traduit précisément l'égalité des solutions polynômes de ① et de ②. Préciser alors $E_1 \cap J$.

ⓒ *Application numérique*

Résoudre, dans H , le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - f(x,y) = 1 - 6x + 2y + x^2 - xy + 3y^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) + f(x,y) = 2 + 5x - 7y - x^2 + xy - 3y^2 \end{cases}$$

II

a, b, α, β sont quatre constantes réelles données, avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Elles seront fixées différemment suivant les questions qui suivent.

1) On note respectivement ψ_1 et ψ_2 les endomorphismes de H ainsi définis :

$$(\forall f \in H) \qquad \psi_1(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + a f$$

$$\psi_2(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + b f$$

ⓐ On prend $a = r^2$, $b = -s^2$ (r et s strictement positifs) et $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Déterminer $\operatorname{Ker} \psi_1$, $\operatorname{Ker} \psi_2$ et $\operatorname{Ker} \psi_1 \cap \operatorname{Ker} \psi_2$

ⓑ Même question dans le cas de $a = r^2$, $b = s^2$, $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

2) On suppose donnés deux éléments A et B de H . On note E_2 la partie de H éventuellement vide, constituée par les solutions communes avec deux équations

$$③ \qquad \psi_1(f) = A \qquad\qquad ④ \qquad \psi_2(f) = B$$

Montrer que A et B, et leurs dérivées partielles du premier et du second ordre, satisfont nécessairement, pour que E_2 soit non vide, à une relation $\mathcal{R}_2$ qu'on écrira.

3) Appliquer l'étude précédente aux deux cas suivants

ⓐ $a = +r^2$, $b = -s^2$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, A est fonction de x seulement et B fonction de y seulement.

ⓑ $a = -r^2$, $b = -s^2$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, A est fonction de y seulement et B fonction de x seulement

On exprimera A et B, dans chacun de ces deux cas, de la manière la plus générale pour que E_2 soit non vide, et on déterminera E_2 .

4) J étant le sous-espace vectoriel de H constitué par les fonctions polynômes, soient χ_1 et χ_2 , respectivement, les restrictions de ψ_1 et ψ_2 à J .

ⓐ Démontrer que χ_1 et χ_2 sont des automorphismes de J. On établira à cet effet que, lorsque A est élément de J , l'équation ③ considérée séparément admet une solution et une seule dans J ; on montrera que cette solution peut s'exprimer sous forme d'une combinaison linéaire de A et de ses dérivées partielles successives par rapport à la première variable.

On opèrera de même pour l'équation ④

ⓑ Montrer que, lorsque A et B sont des éléments de J, la relation $\mathcal{R}_2$ traduit précisément l'égalité des solutions polynômes de ③ et de ④ . Préciser alors $E_2 \cap J$.

ⓒ *Application numérique*

Résoudre, dans H , le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + f(x,y) = 1 - 11x - 8y + x^2 - 2xy^2 - x^3 - y^3 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - f(x,y) = 1 + x + 2y - x^2 + 2xy^2 + x^3 + y^3 \ . \end{cases}$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail